D'où l'axe (ΩN) de la similitude $(f \circ g)$ est la perpendiculaire en Ω à (AB).

PROBLEME

I-1)a- φ est la somme de deux fonctions dérivables sur $]0,1[$ donc φ est dérivables sur $]0,1[$.

$$\cdot\ \forall x \in]0,1[;\ \varphi(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x(1-x^2)+2x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{4x}{(1-x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2}{x(-1+x)^2(x+1)^2} > 0$$

D'où le tableau de variation de φ

x	0		α		1
$\varphi'(x)$	‖	$+$		$+$	‖
$\varphi(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	‖ $+\infty$

$$\lim_{x^+} \varphi = \lim_{x\to 0^+} \left(\operatorname{Log} x + \frac{1+x^2}{1-x^2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{1^-} \varphi = \lim_{x\to 1^-} \left(\operatorname{Log} x + \frac{1+x^2}{1-x^2}\right) = +\infty$$

b- φ est continue et strictement croissante sur $]0,1[$

$\Rightarrow$ φ réalise une bijection de $]0,1[$ sur $\varphi(]0,1[) =]-\infty,+\infty[$ qui contient 0

$\Rightarrow$ l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une seule solution α dans $]0,1[$.

$$\cdot\ \varphi\left(\frac{1}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} \approx -0,252 < 0.$$

$$\cdot\ \varphi\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,151 > 0$$

Ainsi $\varphi\left(\frac{1}{4}\right) < \varphi(\alpha) < \varphi\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{3}$.

car φ est strictement croissante sur $]0,1[$.

c- $\cdot$ Soit $x \in]0,\alpha]$ on a :

$0 < x < \alpha \overset{\varphi\nearrow}{\Rightarrow} \varphi(x) < \varphi(\alpha) = 0$.

$\cdot$ Soit $x \in]\alpha,1]$ on a :

$\alpha < x < 1 \overset{\varphi\nearrow}{\Rightarrow} 0 = \varphi(\alpha) < \varphi(x)$.

D'où le tableau de signe de $\varphi(x)$.

x	0		α		1
signe$(\varphi(x))$	‖	$-$	0	$+$	‖